Opmerkingen bij de vierkantswortelspiraal

Ernst Bläuenstein, Zwitserland *

31 Oct. 2007

De vierkantswortelspiraal is de oudste spiraal in de wiskunde. Zij is oorspronkelijk afkomstig van Theodorus van Cyrene (ca. 415-399 BC), filosoof en wiskundige, geboren in de in Noord-Afrika gelegen Griekse kolonie Cyrene. Hij leefde later in Athene, tijdgenoot en collega van Socrates (469-399 BC). De spiraal is geen vloeiende kromme, maar een veelhoekige. Het is dus een spiraal bestaande uit veelhoeken. De "stralen" (= afstanden tot het midden) zijn de opeenvolgende wortels uit de natuurlijke getallen: $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ etc., waarbij de spiraal geen volledige rondgang maakt, namelijk 351° bij elkaar (en dus geen 360°).
Alle driehoeken in de figuur zijn rechthoekig, waarbij de lengte van de kortste rechthoekszijde steeds één is ($s = 1$ in figuur 1). Daardoor geldt voor de opeenvolgende "stralen" (gebruikmakend van de stelling van Pythagoras):

$$\begin{aligned}
r_1^2 = r_0^2 + s^2 \ dus \ r_1 = \sqrt{r_0^2 + s^2} &= \sqrt{1^2 + 1^2} &&= \sqrt{2} \approx 1.414\\
r_2^2 = r_1^2 + s^2 \ dus \ r_2 = \sqrt{r_1^2 + s^2} &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} &&= \sqrt{3} \approx 1.732\\
r_3^2 = r_2^2 + s^2 \ dus \ r_3 = \sqrt{r_2^2 + s^2} &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} &&= \sqrt{4} = 2.000\\
r_4^2 = r_3^2 + s^2 \ dus \ r_4 = \sqrt{r_3^2 + s^2} &= \sqrt{(\sqrt{4})^2 + 1^2} &&= \sqrt{5} \approx 2.236\\
enz. \quad & \quad enz.\\
r_{16}^2 = r_{15}^2 + s^2 \ dus \ r_{16} = \sqrt{r_{15}^2 + s^2} &= \sqrt{(\sqrt{16})^2 + 1^2} &&= \sqrt{17} \approx 4.123
\end{aligned}$$

De hoeken tussen opeenvolgende "stralen" noemen we $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{16}$ (zie figuur 1).
De totale hoeken die de opeenvolgende "stralen" maken met de horizontale as zijn dan: $\varphi_1 = \alpha_1, \varphi_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \varphi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ etc. etc. tot en met $\varphi_{16} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_{16}$.
Hierin is

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = arcsin\frac{s}{r_1} &= arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°\\
\alpha_2 = arcsin\frac{s}{r_2} &= arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 35.26°\\
\alpha_3 = arcsin\frac{s}{r_3} &= arcsin\frac{1}{\sqrt{4}} = 30°\\
\alpha_4 = arcsin\frac{s}{r_4} &= arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 26.57°\\
enz. \quad & \quad enz.\\
\alpha_{16} = arcsin\frac{s}{r_{16}} &= arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \approx 14.04°
\end{aligned}$$

Dit levert $\varphi_{16} = 45° + 35.26° + 30° + ... + 14.04° \approx 351.13°$.
Met φ_{16} bereikt de spiraal nagenoeg een volledige rondgang van 360° dus, waarbij de laatste "straal" $r_{16} = \sqrt{17}$ bedraagt, dus ongeveer 4.123. Zou men er nog één "straal" aan toe voegen, r_{17}, dan zou er nog 13.63° bij komen en het totaal voor φ_{17} dus op 364.76° uitkomen, dus méér dan 360°. Theodorus heeft de spiraal slechts tot $\sqrt{17}$ beschreven, het getal dat ook tevoorschijn komt als men papier in 16 gelijke delen verdeelt. Binnen de wiskunde maakt deze spiraal echter ontelbaar veel rondgangen,

*vertaling: Hans Evers, docent wiskunde Stedelijk Gymnasium in Utrecht

waarbij dan natuurlijk ook de "straal" steeds groter wordt en op den duur dus nadert tot "oneindig groot".
Figuur 2 laat een gevouwen spiraal zien tot en met $r_{32} = \sqrt{33} \approx 5.74$. Het papier is aldus in 32 gelijke delen opgedeeld. De totale draaihoek hierbij is 536.25°, dus vrijwel $1\frac{1}{2}$ rondgang ($\frac{3}{2} \times 360 = 540$). Wat daarna komt is tot en met $r_{53} = \sqrt{54}$ getekend, waarbij dan de spiraal inmiddels twee volledige rondgangen net iets overschrijdt, want $\varphi_{53} \approx 727.4°$, dus 7.4° meer dan 2 rondgangen. Opvallend is de vrijwel gelijkgebleven " windingsafstand", die met d wordt aangegeven.

Berekening van d:
Na één rondgang is $d = r_{17} - r_0 \approx \sqrt{18} - 1 = 3.24$.
Na twee rondgangen is $d = r_{32} - r_{16} \approx \sqrt{33} - \sqrt{17} = 3.16$.
Het blijkt dat als men hiermee doorgaat, dat de waarde van d nadert tot $\pi \approx 3.14159....$
Een constante windingsafstand is kenmerk van de circ 200 jaar minder oude "Archimedes spiraal". Deze bestaat niet uit veelhoeken/driehoeken, maar is een vloeiende kromme (zonder hoekpunten). Daarbij hoort de vergelijking $r = a\varphi$, met $a = \frac{d}{2\pi}$. Voor een "Archimedes spiraal" met windings afstand d geldt de vergelijking $r = \frac{\pi}{2\pi}\varphi$, dus $r = 0.5\varphi$. Naarmate men het aantal windingen laat toenemen zal de "Vierkantwortelspiraal" steeds meer gaan lijken op de "Archimedes spiraal".

N.B. De berekende getallen kunnen via vouwen zoals figuur 2 gecontroleerd worden, waarbij de genoemde eenheid 15 mm is, dus bv. als er $r_4 = \sqrt{5} \approx 2.236$ staat, is de lengte in het model van figuur 2 gelijk aan $2.236 \times 15mm \approx 33.5mm$.